Théorème : de Heine

Toute fonction réelle continue sur un segment y est uniformément continue.

Démonstration :

Soit $a \leq b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.

Par l'absurde, supposons que f ne soit pas uniformément continue.

$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x, y \in [a,b]$ tels que $|y - x| \leq \eta$ et $|f(y) - f(x)| > \varepsilon$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en posant $\eta = \dfrac{1}{n+1} > 0$, il existe deux éléments de $[a,b]$ que l'on note x_n et y_n tels que $|y_n - x_n| \leq \dfrac{1}{n+1}$ et $|f(y_n) - f(x_n)| > \varepsilon$. On définit ainsi deux suites (x_n) et (y_n).

La suite (x_n) est une suite réelle bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ converge.

Posons $c = \lim\limits_{n^\infty} x_{\varphi(n)}$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, a \leq x_{\varphi(n)} \leq b$, à la limite $a \leq c \leq b$.

De plus $|y_{\varphi(n)} - c| \leq |y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}| + |x_{\varphi(n)} - c| \leq \dfrac{1}{\varphi(n)+1} + |x_{\varphi(n)} - c| \underset{n^\infty}{\to} 0$,

donc $y_{\varphi(n)} \to c$.

La fonction f étant continue en $c \in [a,b]$ on a :

$f(x_{\varphi(n)}) \to f(c)$ et $f(y_{\varphi(n)}) \to f(c)$.

Or $|f(y_{\varphi(n)}) - f(x_{\varphi(n)})| > \varepsilon$ donc à la limite $0 \geq \varepsilon$. Absurde !